Άσκηση Επανάληψης 3 (σελ. 311)

$X_1, \dots, X_6 \sim N(0,1)$

$$Z_1 = \frac{X_1+X_2}{2}, \quad Z_2 = \frac{X_3+\dots+X_6}{4}, \quad Z_3 = \frac{\sqrt{2}(X_1-X_2)}{\sqrt{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}}$$

$$Z_4 = \frac{(X_1-X_6)^2+(X_2-X_5)^2+(X_3-X_4)^2}{2}$$

α) Να βρεθούν οι κατανομές των:

(i) $\frac{Z_1+Z_2}{2}$, (ii) $2Z_1^2+4Z_2^2$, (iii) X_3-Z_2, (iv) Z_3, (v) Z_4

β) Να βρεθούν οι σταθερές c_1 και c_2:

(i) $P(Z_3 \geq -c_1) = 0{,}99$ και (ii) $P(Z_4 \leq c_2) = 0{,}99$

Λύση

α) i) $X_1+X_2 \sim N(0,2) \Rightarrow \frac{X_1+X_2}{2} \sim N(0,\frac{1}{2})$

$X_3+\dots+X_6 \sim N(0,4) \Rightarrow \frac{X_3+\dots+X_6}{4} \sim N(0,\frac{1}{4})$

$Z_1+Z_2 \sim N(0,\frac{3}{4}) \Rightarrow \frac{Z_1+Z_2}{2} \sim N(0,\frac{3}{16})$

ii) $Z_1 \sim N(0,\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sim N(0,1)$

$Z_2 \sim N(0,\frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{Z_2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow 2Z_1^2+4Z_2^2 \sim X_2^2$

iii) $X_3 - Z_2 \sim N(\ ,\ ) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_3 - \frac{X_3+\dots+X_6}{4} = \frac{3X_3}{4} - \frac{X_4+X_5+X_6}{4} \sim N\left(0, \frac{9}{16}+\frac{1}{16}(1+1+1)\right) \equiv N\left(0,\frac{3}{4}\right)$$

iv) $X_1-X_2 \sim N(0,2) \rightarrow \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

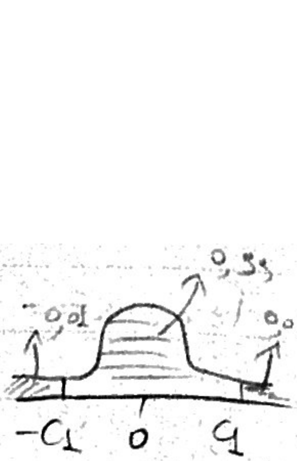
$\frac{X_3-X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ και $\frac{X_5-X_6}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$

$$\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_3-X_4}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X_5-X_6}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(X_1-X_2)}{\sqrt{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}} \sim t_2$$

v) $$Z_4 = \left(\frac{X_1-X_6}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X_2-X_5}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X_3-X_4}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim X_3^2$$

β) i) $P(Z_3 \geq -c_1) = 0,99 \Rightarrow P(t_2 \geq -c_1) = 0,99$

$\Rightarrow P(t_2 \geq c_1) = 0,01 \Rightarrow c_1 = t_{0.01,2} = 6,965$



iii) $P(Z_4 \leq c_2) = 0,99 \Rightarrow P(\chi_3^2 \leq c_2) = 0,99$

$\Rightarrow P(\chi_3^2 > c_2) = 0,01 \Rightarrow c_2 = \chi^2_{0.01,3} = 11,345$

<u>Άσκηση Επανάληψης 16 (σελ. 313)</u>

$H_0: \mu = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = \kappa$ έναντι της $H_\alpha: \mu \neq \kappa$ $(\alpha = 0,05)$

τυχ. δειγμ. από πληθ. X_1, X_2, X_3 ανεξ.

$X_1 \sim N(\mu_1, c_1\sigma^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, c_2\sigma^2)$

$X_3 \sim N(\mu_3, c_3\sigma^2)$

$\hat{\mu} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3$

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3 \sim N\left(\mu, \frac{c_1\sigma^2 + c_2\sigma^2 + c_3\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3 - \mu}{\sqrt{\frac{c_1\sigma^2 + c_2\sigma^2 + c_3\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1) \quad (*)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{c_1\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}, \quad \frac{(n-1)S_2^2}{c_2\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}, \quad \frac{(n-1)S_3^2}{c_3\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow$$

$$\frac{n-1}{\sigma^2}\left[\frac{S_1^2}{c_1} + \frac{S_2^2}{c_2} + \frac{S_3^2}{c_3}\right] \sim \chi^2_{3(n-1)} \quad (**)$$

Από $(*)$ κ $(**)$:
$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3 - \mu) / \sigma\sqrt{c_1 + c_2 + c_3}}{\sqrt{(n-1)\left(\frac{S_1^2}{c_1} + \frac{S_2^2}{c_2} + \frac{S_3^2}{c_3}\right) / \sigma^2 3(n-1)}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{3(n-1)}/3(n-1)}} \sim t_{3(n-1)}$$

Για τον έλεγχο της H_0 χρησιμ. το t:

$$t = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3 - \kappa}{\sqrt{\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3n}\left(\frac{S_1^2}{c_1} + \frac{S_2^2}{c_2} + \frac{S_3^2}{c_3}\right)}}$$ κ. κρ. περ. $|t| \geq t_{3(n-1)}$

Άσκηση Επανάληψης 17 (σελ. 314)

6 7 9 8 10 8 11 7

6 5 10 5 11 9 10 6 , $n=16 \mid N(\mu, \sigma^2)$

i) καλύτεροι-γρηγορότεροι; ($\alpha=0,05$) σε 95% ΔΕ. Επίσης.

ii) Αν $\sigma^2=9$ το (i) και ισχύς για $H_a: \mu=9$

Λύση

(i) $H_0: \mu \geq 10$ έναντι $H_a: \mu < 10$

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \text{ και κρ. περ. } t \leq -t_{0.05,15} = -1,753$$

$\bar{x}=8$, $S^2=4,26$ ($S=2,064$), $n=16$

$$t=\frac{8-10}{2,064/\sqrt{16}}=-3,88 \text{ και επειδή } t=-3,88<-1,753 \text{ απορ. } H_0$$

(Είναι καλύτεροι)

$$95\% \text{ ΔΕ: } \bar{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} = 8 \pm 2,131 \cdot \frac{2,064}{\sqrt{16}} \text{ άρα}$$

ΔΕ: $[6.911 , 9.089]$

(ii) $H_0: \mu \geq 10$ έναντι $H_a: \mu<10$, $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$

και κρ. περ. $Z \leq -Z_\alpha (= -Z_{0,05} = -1,645)$

$$Z=\frac{8-10}{3/\sqrt{16}}=-2,67 \text{ επειδή } -2,67<-1,645 \text{ απορ. } H_0$$

$$\gamma=1-\beta, \ \beta=P(\text{δεχ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) = P(Z \geq -Z_\alpha \mid \mu=9)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(\frac{\bar{X}-10}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -1,645 \mid \mu=9\right) = P\left(\frac{\bar{X}-10+1}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -1,645+\frac{1}{3/\sqrt{16}} \mid \mu=9\right)$$

$$= P(Z \geq 0,312) = 0,3775$$